計算情報数学第一回レポート

2026 年 4 月 10 日

問題 **1**. 補題を用意する．

Lem. $G = (V, E)$ を無向グラフとする．このとき，以下が成り立つ．
(a) G が連結 $\implies |E| \geq |V| - 1$
(b) G が森 $\implies |E| \leq |V| - 1$

Proof. (a) $n = |V|$ の帰納法で示す．$n = 1, 2$ のときは明らか．
$n \geq 3$ のとき，$v \in V$ を任意に選んで

$$V' := V \setminus \{v\}, \quad E' := \left\{ e = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in E \;\middle|\; v_1, v_2 \neq v \right\}$$

に対して $G' := (V', E')$ とおく．このとき G' の連結成分を $\{G'_i\}_{i=1}^N$ とすると，

$$\begin{aligned} |E| &= |E'| + \deg(v) \\ &= \sum_{i=1}^N |E(G'_i)| + \deg(v) \\ &\geq \sum_{i=1}^N (|V(G'_i) - 1|) + \deg(v) \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= |V'| - N + \deg(v) \\ &\geq |V| - 1 - N + N \\ &= |V| - 1 \end{aligned}$$

以上より任意の $|V| = n$ を持つ連結な無向グラフ G について $|E| \geq |V| - 1$
(b) $n = |V|$ の帰納法で示す．$n = 1, 2, 3$ のときは明らか．$n \geq 4$ としてよい．G は森より，$v \in V$ を葉として取れる．すなわち，

$$V' := V \setminus \{v\}, \quad E' := \left\{ e = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in E \;\middle|\; v_1, v_2 \neq v \right\}$$

としたとき $|E| \leq |E'| + 1$ となるように選べる．このとき，$G' := (V', E')$ の連結成分を $\{G'_i\}_{i=1}^N$ とおいて，

$$\begin{aligned} |E| &\leq |E'| + 1 \\ &= \sum_{i=1}^N |E(G'_i)| + 1 \\ &\leq \sum_{i=1}^N (|V(G'_i)| - 1) + 1 \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= |V'| - N + 1 \\ &= |V| - 1 - N + 1 \\ &\leq |V| 1 \end{aligned}$$

以上より任意の $|V| = n$ を持つ森 G について $|E| \leq |V| - 1$

$\square$