

記号

(以下の問題では次の記号を用いる)

(1) 特に断りのない限り, G は有限群を表す.

(2) \mathbb{F}_q : 位数 q の有限体

(3) $\text{GL}(n, q)$: 成分が \mathbb{F}_q の n 次の正則行列のなす群

(4) $B_q = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{F}_q^\times, b \in \mathbb{F}_q \right\}$, $T_q = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_q^\times \right\}$, $N_q = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}_q \right\}$.

問題 A

1. 次の問いに答えよ

(1) (π, V) を G の既約表現とし, G の中心を $Z(G)$ と書く. この時, 各 $z \in Z(G)$ に対し, $\pi(z)$ は V にスカラー倍で作用する. つまりある $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ が存在して, $\pi(z)(v) = \alpha v$ ($\forall v \in V$) となることを示せ.

(2) G の表現 (σ, W) は σ が単射の時, 忠実であるという. 群 G が忠実な既約表現を持つなら, G の中心 $Z(G)$ は巡回群であることを示せ.

2. χ を G の表現の指標とし, ある $t \in \mathbb{C}$ で $\chi(g) = t$ ($\forall g \neq e$) となるものが存在したとする. この時, $\chi = a\mathbf{1} + b\chi_\rho$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) とかけることを示せ. ここで, $\mathbf{1}$ は自明表現で, χ_ρ は正則表現の指標.

3. χ を G の 2 次元指標とする. $x \in G$ が位数 2 の元であるとき, $\chi(x) = -2, 0$ または 2 となることを示せ. 一般に, χ が n 次元表現の指標ならば, 任意の $g \in G$ に対し, $|\chi(g)| \leq n$ を示せ.

4. 群 G が次の指標表を持つ時, a_i, b_i の値を求めよ. ただし, $a_1 \geq b_1$, $[g_i]$ は g_i を含む共役類, e は G の単位元を表す.

	e	g_1	g_2	g_3	g_4
$[g_i]$	1	4	5	5	5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	i	-1	$-i$
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
χ_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5

5. (π, V) を G の既約表現とする. α を G の類関数とした時,

$$\phi_{\alpha, V} = \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \pi(g) \in \text{End}(V)$$

とおき. この時,

$$\phi_{\alpha, V} = \frac{|G| \langle \alpha, \chi_V \rangle}{\dim V} \cdot \text{Id}_V$$

を示せ.

6. $(\pi, V), (\rho, W)$ を G の既約表現とした時,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\pi(g) \chi_\rho(g^{-1}h) = \frac{1}{\dim V} \chi_\pi(h) \delta_{\pi, \rho}$$

を示せ. ただし, $\pi \simeq \rho$ ($\pi \not\simeq \rho$) なら $\delta_{\pi, \rho} = 1$ ($\delta_{\pi, \rho} = 0$).

7. $(\pi, V), (\sigma, W)$ を G の既約表現とする. この時, $v \in V, v^* \in V^*, w \in W, w^* \in W^*$ に対し, 次が成り立つことを下のようにして示せ.

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v^*(\pi(g)v)w^*(\sigma(g^{-1})w) = \begin{cases} \frac{1}{\dim V} \langle w^*, v \rangle \langle v^*, w \rangle & \text{if } V \simeq W \\ 0 & \text{if } V \not\simeq W \end{cases}$$

ただし, $V \simeq W$ の時, 右辺は $V = W$ として, $w \in V, w^* \in V^*$ と考えている.

- (1) $\varphi_{v^*, w}(v) = \sum_{g \in G} v^*(\pi(g)v)\sigma(g^{-1})w \in W$ と置く. この時, $v \mapsto \varphi_{v^*, w}(v) \in \text{hom}_G(V, W)$ を示せ.
 (2) シューアの補題と問題 6 の結果 (証明せずに使っても良い) を用いて, 上の結果を示せ.

8. 内積を計算することで $\text{Ind}_{S_2}^{S_3}(1)$ と $\text{Ind}_{A_3}^{A_4}(1)$ が既約でないことを示せ.

9. 二面体群 $D_8 = \langle r, s : r^4 = s^2 = e, -s^{-1}rs = r^{-1} \rangle$ は 2 次元既約表現を持つ. この既約表現を与えるベクトル空間 V と準同型 $\pi : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ を具体的に構成せよ.

10. S_3 の表現 (π, V) を以下のように定義する.

- $V = \mathbb{C}[S_3]$
- $\pi(g)v = gv g^{-1}$

この時, 次の問いに答えよ.

- (1) χ_π を計算せよ.
 (2) S_3 の各既約表現 σ に対して, π を既約表現の直和に分解したときの σ の重複度を求めよ.

11. G がアーベル群でないなら, G は次元が 2 以上の既約表現を持つことを示せ.

12. G の任意の既約表現の指標 χ に対して, $\chi(s) = \chi(t)$ ($s, t \in G$) が成り立つなら, s と t は共役であることを示せ.

13. (π, V) を $\text{GL}(2, q)$ の既約表現とする.

$$\sum_{n \in N_q} \pi(n)v \neq 0$$

となる $v \in V$ が存在するなら, 適当な T_q の 1 次元表現 χ に対して, π は $\text{Ind}_{B_q}^{\text{GL}(2, q)}(\chi)$ の部分表現と同型であることを示せ. ただし, χ は $\chi(tn) = \chi(t)$ ($t \in T_q, n \in N_q$) により B_q の 1 次元表現とみなす.

14. G を位数 143 の群とする. この時, G の既約表現の次元を決定せよ. ただし, 次の事実は用いて良い.

事実: G を有限群, (π, V) を G の既約表現とした時, $\dim V$ は $|G|$ の約数である.

15. $G = S_n$ の時に問 14 で書いた事実, つまり G の任意の既約表現 (π, V) に対して, $\dim V$ は $|G|$ の約数であることを示せ.

16. 問 14 で書いた事実を任意の有限群に対して証明せよ. (ヒント: 問 6)

問題 B

1. 位数 12 の群 T_{12} を $T_{12} = \{a, b \mid a^6 = 1, a^3 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1}\}$ で定める.

- (1) T_{12} の共役類は 6 個であることを示せ.
 (2) T_{12} の指標表を作成せよ.

2. B_2 の指標表を作成せよ. また, B_2 の既約表現 (π, V) に対して, $\text{Ind}_{B_2}^{\text{GL}(2, 2)} \pi$ は既約かどうか調べよ.

3. B_3 の指標表を作成せよ. また, B_3 の既約表現 (π, V) に対して, $\text{Ind}_{B_3}^{\text{GL}(2,3)} \pi$ は既約かどうか調べよ.

4. 次の問いに答えよ.

(1) S_4 の既約表現の同型類の個数を求めよ.

(2) 4 の各分割に対応する既約表現の次元を求めよ. また, それぞれの既約表現を与える $\mathbb{C}[S_4]$ の原始冪等元を一つ具体的に与えよ.

(3) S_4 の指標表を作成せよ. ただし, (2) は使わなくても良い.

(4) (3) を使って, S_4 の場合に Frobenius の公式が正しいことを確かめよ.

5. A_4 の指標表を作成せよ. また, S_4 の各既約表現を A_4 に制限した時の既約分解を与えよ.

6. $P(\mathbb{F}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(3, 2) \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}_2 \right\}$ と定義する. この時, $P(\mathbb{F}_2)$ の指標表を作成せよ.

7. 次の問いに答えよ

(1) G を任意の有限群, (π, V) を G の任意の表現とする. この時, $g \in G$ の位数が m なら $\chi_V(g) \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$ となることを示せ. ただし, ζ_m は 1 の原始 m 乗根とする.

(2) (1) の記号のもとで, $k \in \mathbb{Z}$ が m と互いに素なら, $\sigma(\chi_V(g)) = \chi_V(g^k)$ となる $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ が存在することを示せ. また, 反対に任意の $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ に対して, $\sigma(\chi_V(g)) = \chi_V(g^k)$ となる m と互いに素な $k \in \mathbb{Z}$ が存在することを示せ.

(3) $g \in S_n$ の位数を m とする. $k \in \mathbb{Z}$ が m と互いに素なら g と g^k は共役であることを示せ.

(4) (1)~(3) を用いて, S_n の任意の表現 (π, V) に対して $\chi_V(g) \in \mathbb{Q}$ を示せ.

(5) S_n の任意の表現 (π, V) に対して $\chi_V(g) \in \mathbb{Z}$ を示せ.

8. 以下のようにして, S_5 の指標表を作成せよ.

(1) S_5 の既約表現の次元を全て求めよ.

(2) (π_6, V_6) を S_5 のただ一つの 6 次元既約表現とした時, χ_{V_6} を求めよ. (ヒント: $\pi_6 \otimes \text{sgn} \simeq \pi_6$ と指標の直交関係)

(3) 問題 7(5) を用いて S_5 の指標表を完成させよ. (問題 7(5) は証明していなくても使って良い)

9. 群 $\text{SO}_n(\mathbb{F}_3)$ を次で定義する.

$$\text{SO}_n(\mathbb{F}_3) = \left\{ g \in \text{GL}(n, 3) \mid {}^t g \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \det g = 1 \right\}$$

このとき, $\text{SO}_3(\mathbb{F}_3)$ の既約表現の $\text{SO}_2(\mathbb{F}_3)$ への制限は重複度が高々 1 であることを示せ.